Dr. M. Bier (bier@is.mpg.de)
M.Sc. H. Bartsch

Physik der Flüssigkeiten: Vertiefung **SoSe 2018**

2. Übungsblatt (`http://www.is.mpg.de/dietrich/lehre/PdF`) **5. Juni 2018**

4. *Poiseuille-Strömung zwischen ebenen Wänden*

Betrachten Sie in $d = 3$ Raumdimensionen eine inkompressible Flüssigkeit mit Scherviskosität η zwischen zwei ruhenden planaren Wänden parallel zur x-z-Ebene bei $y = 0$ bzw. $y = a$. Die Wände seien in z-Richtung unendlich ausgedehnt, während sie in x-Richtung von $x = 0$ bis $x = L$ reichen. Zwischen $x = 0$ und $x = L$ bestehe ein zeitlich konstantes Druckgefälle $\Delta p = p(x = 0) - p(x = L)$. Im Folgenden soll $L \gg a$ vorausgesetzt werden, so dass das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ als in x-Richtung homogen angenommen werden kann.

(a) Argumentieren Sie unter Zuhilfenahme von Symmetrien und der Inkompressibilität, dass das Geschwindigkeitsfeld von der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = v_x(y)\mathbf{e}_x \tag{1}$$

ist.

(b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass die Navier-Stokes-Gleichung die Form

$$0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \tag{2}$$

annimmt.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Gln. (1) und (2) das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, die von der Strömung auf die Wände ausgeübte laterale Kraft pro Wandfläche sowie den Massenstrom (Dimension Masse / Zeit) pro Wandbreite in z-Richtung durch eine Ebene senkrecht zur x-Achse.

5. *Poiseuille-Strömung durch zylindrisches Rohr*

Betrachten Sie in $d = 3$ Raumdimensionen eine inkompressible Flüssigkeit mit Scherviskosität η in einem ruhenden zylindrischen Rohr mit Radius R und mit z-Achse als Symmetrieachse. Zwischen den Öffnungen des Rohrs bei $z = 0$ und $z = L$ bestehe ein zeitlich konstantes Druckgefälle $\Delta p = p(z = 0) - p(z = L)$ Im Folgenden soll $L \gg R$ vorausgesetzt werden, so dass das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ als in z-Richtung homogen angenommen werden kann.

Es bietet sich an, Zylinderkoordinaten zu benutzen; für diese lautet der Nabla-Operator

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{3}$$

(a) Argumentieren Sie unter Zuhilfenahme von Symmetrien und der Inkompressibilität, dass das Geschwindigkeitsfeld von der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = v_z(r)\mathbf{e}_z \tag{4}$$

ist.

Fortsetzung auf Seite 2

(b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass die Navier-Stokes-Gleichung die Form

$$0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \tag{5}$$

annimmt.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von Gln. (4) und (5) das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, die von der Strömung auf das Rohr ausgeübte axiale Kraft sowie den Massenstrom (Dimension Masse / Zeit) durch eine Ebene senkrecht zur z-Achse.

6. *Strömung um Kugel*

Betrachten Sie in $d = 3$ Raumdimensionen eine am Ursprung festgehaltene Kugel mit Radius R, die sich im stationären Strömungsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit mit Scherviskosität η befindet. In großem Abstand von der Kugel ($|\mathbf{r}| \gg R$) sei das Stömungsfeld homogen: $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \to \mathbf{u}, |\mathbf{r}| \to \infty$. Es liege der Fall kleiner Reynolds-Zahlen ($\mathrm{Re} \ll 1$) vor, d.h. das Strömungsfeld genügt der Stokesschen Gleichung

$$0 = -\nabla p(\mathbf{r}) + \eta \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}) \tag{6}$$

mit no-slip boundary conditions auf der Kugeloberfläche. Wegen der Inkompressibilität gilt außerdem

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0. \tag{7}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Lösung des vorliegenden Strömungsproblems durch

$$v_i(\mathbf{r}) = -\frac{3R}{4}\left(\frac{u_i}{r} + \frac{r_i u_j r_j}{r^3}\right) - \frac{R^3}{4}\left(\frac{u_i}{r^3} - \frac{3 r_i u_j r_j}{r^5}\right) + u_i, \tag{8}$$

$$p(\mathbf{r}) = p_\infty - \frac{3\eta R u_i r_i}{2r^3} \tag{9}$$

gegeben ist, wobei $r = |\mathbf{r}|$ bedeutet und p_∞ der Druck bei $r \to \infty$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Kraft $\mathbf{F}$, die benötigt wird, um die Kugel am Ursprung festzuhalten.